

2025年度全学統一入学試験問題

数 学【理工学部】

(2月3日)

開始時刻 午後1時00分

終了時刻 午後2時00分

I 注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この冊子は5ページです。落丁、乱丁、印刷の不鮮明及び解答用紙の汚れなどがあった場合には申し出てください。
3. 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督員の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしてください。

① 受験番号欄

受験番号を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしてください。正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。

② 氏名欄

氏名とフリガナを記入してください。

4. ☐ 1 ~ ☐ 3 と ☐ 4 または ☐ 5 を選択してください。
(☐ 4 と ☐ 5 の両方を解答した場合は
高得点の方を合否判定に使用します。)
5. 問題冊子の余白等は適宜利用してもかまいません。
6. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。

※ 解答上の注意は、裏表紙に記載してあります。この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。

- 1 座標平面上に放物線 $C: y = 2x^2 - 8x + 5$ と、2点 $A(0, -6)$, $B(3, -3)$ がある。実数 t を用いて表される C 上の点 $P(t, 2t^2 - 8t + 5)$ を考える。

問 1 C の頂点の座標は $(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イウ}})$ である。

問 2 $\triangle ABP$ の重心の座標を t を用いて表すと $\left(\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}t + \boxed{\text{カ}}, \frac{\boxed{\text{キ}}t^2 - \boxed{\text{ク}}t - \boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \right)$

となる。 P が C 上を動くとき、 $\triangle ABP$ の重心の軌跡は

放物線 $y = \boxed{\text{サ}}x^2 - \boxed{\text{シス}}x + \frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ となる。

問 3 $\triangle ABP$ の面積 S を t を用いて表すと、 $S = \boxed{\text{チ}}t^2 - \frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}t + \frac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ となる。 S の

最小値は、 P の座標が $\left(\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}, \frac{\boxed{\text{ハヒフ}}}{\boxed{\text{ヘ}}} \right)$ のとき、 $\frac{\boxed{\text{ホマ}}}{\boxed{\text{ミム}}}$ である。

2 次の漸化式で定義された数列 $\{a_n\}$ について考える。

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 3a_n - 6n + 2^n$$

問 1 $a_2 = \boxed{\text{ア}}$, $a_3 = \boxed{\text{イ}}$, $a_4 = \boxed{\text{ウエ}}$ である。

問 2 漸化式より, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 6(n+1) + 2^{n+1}$ である。この式からもとの漸化式を引くと,

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \boxed{\text{オ}} (a_{n+1} - a_n) - \boxed{\text{カ}} + \boxed{\text{キ}}^n \text{ となる。これを变形すると,}$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} - \boxed{\text{ク}} = \boxed{\text{オ}} (a_{n+1} - a_n - \boxed{\text{ク}}) + \boxed{\text{キ}}^n \text{ である。}$$

$$b_n = a_{n+1} - a_n - \boxed{\text{ク}} \text{ とすると, } b_{n+1} = \boxed{\text{オ}} b_n + \boxed{\text{キ}}^n \text{ である。}$$

$$\text{両辺を } \boxed{\text{キ}}^{n+1} \text{ で割ると, } \frac{b_{n+1}}{\boxed{\text{キ}}^{n+1}} = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \frac{b_n}{\boxed{\text{キ}}^n} + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \text{ となる。}$$

$$c_n = \frac{b_n}{\boxed{\text{キ}}^n} \text{ とすると, } c_{n+1} = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} c_n + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \text{ である。}$$

$$\text{これを变形すると, } c_{n+1} + \boxed{\text{ス}} = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} (c_n + \boxed{\text{ス}}) \text{ となる。} c_n \text{ を求めてから } b_n \text{ を}$$

求めれば $b_n = 3^{n-1} - 2^n$ であることがわかる。

以上より, $a_{n+1} - a_n = 3^{n-1} - 2^n + 3$ と求められる。

問 3 $a_{n+1} - a_n = 3^{n-1} - 2^n + 3$ より,

$$a_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} (3^{k-1} - 2^k + 3) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

$$= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} 2^k + \sum_{k=1}^{n-1} 3 \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \text{ となる。}$$

ここで,

$$\sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1} = \frac{\boxed{\text{セ}}^{n-1} - \boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}, \quad \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = \boxed{\text{チ}}^n - \boxed{\text{ツ}}, \quad \sum_{k=1}^{n-1} 3 = \boxed{\text{テ}} n - \boxed{\text{ト}}$$

であるから,

$$a_n = \frac{\boxed{\text{ナ}}^{n-1}}{\boxed{\text{ニ}}} - \boxed{\text{ヌ}}^n + \boxed{\text{ネ}} n + \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \text{ と求められる。}$$

3 四面体 OABC において, $OA = 3$, $OB = 1$, $OC = 2$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$ が成立している。

問 1 各辺の長さや各面の面積を考えると, $AB = \sqrt{\boxed{\text{アイ}}}$, $BC = \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$, $CA = \sqrt{\boxed{\text{エオ}}}$,

$\triangle OAB = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$, $\triangle OBC = \boxed{\text{ク}}$, $\triangle OCA = \boxed{\text{ケ}}$ である。

問 2 $\angle ABC = \theta$ とすると, $\cos \theta = \frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サシ}}}$, $\sin \theta = \frac{\boxed{\text{ス}} \sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ であるから,

$\triangle ABC$ の面積は $\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ となる。

問 3 点 O から $\triangle ABC$ に垂線 OH を下ろすと, $OH = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ となる。

4, **5** のうちどちらか一方を選択して解答してください。**4** と **5** の両方を解答した場合は、高得点の方を合否判定に使用します。

4 座標平面上の曲線 $C: y = x^3 - 3x$ の接線について考える。

問 1 C 上の点 $(t, t^3 - 3t)$ における接線の方程式は、 $y = (\text{ア} t^2 - \text{イ})x - \text{ウ} t^3$ である。

問 2 C 上にない点 $P(a, b)$ から C に引いた接線について考えよう。接線は点 P を通るから、

問 1 より、 t に関する方程式 $\text{エ} t^3 - \text{オ} at^2 + \text{カ} a + b = 0$ が得られる。

$f(t) = \text{エ} t^3 - \text{オ} at^2 + \text{カ} a + b$ とする。 $f(t)$ を微分することで、極大値と極小値を調べると、 $f'(t) = \text{キ} t(t - a)$ より、

$a > 0$ のとき、 $t = 0$ で極大値 $\text{ク} a + b$ 、 $t = a$ で極小値 $\text{ケ} a^3 + \text{コ} a + b$ である。

$a < 0$ のとき、 $t = 0$ で極小値 $\text{ク} a + b$ 、 $t = a$ で極大値 $\text{ケ} a^3 + \text{コ} a + b$ である。

$a = 0$ のとき、極値は存在しない。

問 3 問 2 で考えた点 P から C に引ける接線の本数がちょうど 2 本になる条件を考えよう。

3 次関数のグラフにおいて、接点が異なれば接線も異なるので、方程式 $f(t) = 0$ の解が 2 個になる条件を調べればよい。点 P は C 上にないことに注意すると、求める条件は、

$\text{サ} a + b = 0$ ($a \neq \text{シ}$) となる。

5 座標平面上の楕円 $C: 4x^2 + 9y^2 = 36$ と直線 $l: y = 3x - 1$ を考える。

問 1 C の長軸の長さは $\boxed{\text{ア}}$ ，短軸の長さは $\boxed{\text{イ}}$ ，焦点の座標は $(\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}, 0)$ ，
 $(-\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}, 0)$ である。

問 2 C によって l から切り取られる線分の中点を考える。

C と l の交点の x 座標を a, β ($a < \beta$) とすると， a, β は方程式

$\boxed{\text{エオ}}x^2 - \boxed{\text{カキ}}x - \boxed{\text{クケ}} = 0$ の解である。解と係数の関係より，中点の座標は
 $\left(\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シス}}}, \frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}} \right)$ となる。

問 3 C を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は $\boxed{\text{ツテ}}\pi$ である。

II 解答上の注意

- 問題の文中の ア、イウ などには、特に指示がないかぎり、数字(0～9)または符号(－、±)が入ります。ア、イ、ウ、…の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア、イ、ウ、…で示された解答欄にマークして答えなさい。

(例) アイウ に -83 と答えたいとき

ア	－	±	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
イ	－	±	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
ウ	－	±	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

なお、同一の問題文中に ア、イウ などが2度以上現れる場合、2度目以降は、ア、イウ のように細字で表記します。

- 分数形で解答する場合は、既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

(例) $\frac{\text{エオ}}{\text{カ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは、 $-\frac{4}{5}$ として

エ	－	±	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
オ	－	±	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
カ	－	±	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

- 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば、キ $\sqrt{\text{ク}}$ 、 $\frac{\sqrt{\text{ケコ}}}{\text{サ}}$ に $4\sqrt{2}$ 、 $\frac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを、 $2\sqrt{8}$ 、

$\frac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。