

2026年度大学院博士前期課程一般入学試験（第Ⅰ期）問題

研 究 科 名	科 目 名
経済学研究科 経済学専攻	計量経済学・統計学

【問題 1】 単回帰モデル $y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$ ($t = 1, \dots, n$) について、誤差項が 1 次の自己回帰モデル $u_t = \rho u_{t-1} + e_t$ に従うとする。ただし e_t は誤差項の標準的な仮定を満たしているとする。

- (1) 単回帰モデルの α と β を OLS で推定した時の残差を $\hat{u}_t$ とする。ダービン・ワトソン統計量 DW を書きなさい。
- (2) ρ の推定値を $\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^n \hat{u}_{t-1} \hat{u}_t}{\sum_{t=2}^n \hat{u}_{t-1}^2}$ とする。 $DW \approx 2(1 - \hat{\rho})$ であることを示しなさい。
- (3) コ克蘭=オーカット法について説明しなさい。

【問題 2】 n 個の 2 次元データ $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ において、 $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i = 0$ とする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) 相関係数 R を与えよ。
- (2) 相関係数は、 $-1 \leq R \leq 1$ を満たすことを証明せよ。
- (3) $R = 1$ となる必要十分条件を求めよ。
- (4) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ とおくとき、 $R = 0$ となるのは、2 つのベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ が幾何学的にどのような関係にあるときか。

解答または解答例：

【問題 1】

(1) 残差 $\hat{u}_t$ をとすると。ダービン・ワトソン統計量は

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2}$$

で与えられる。

(2) DW 統計量の分子を展開して、

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2} = \frac{\sum_{t=2}^n \hat{u}_t^2 + \sum_{t=2}^n \hat{u}_{t-1}^2 - 2 \sum_{t=2}^n \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2} \approx 2 - 2\hat{\rho}$$

を得る。

(3) 推定値 $\hat{\rho}$ を使って、データを次のように変換する。

$$y_t^* = y_t - \hat{\rho} y_{t-1}, \quad x_t^* = x_t - \hat{\rho} x_{t-1} \quad (t = 2, \dots, n)$$

変換したデータを使って、回帰モデル

$$y_t^* = \alpha^* + \beta^* x_t + v_t$$

を考える。ただし $\alpha^* = (1 - \hat{\rho})\alpha$, $\beta^* = \beta$ である。このモデルを最小二乗法で推定すれば、もとのパラメータの推定値は

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\alpha}^*}{(1 - \hat{\rho})}, \quad \hat{\beta} = \hat{\beta}^*$$

となる。以上がコ克蘭＝オーカット法である。

【問題 2】

(1) 相関係数は, $R = \sum_{i=1}^n x_i y_i / \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2}$ で与えられる。

(2) $h(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - t x_i)^2$ とし, $S_{xx} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$, $S_{yy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2$, $S_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$ とおくと,

$$h(t) = S_{yy} - 2t S_{xy} + t^2 S_{xx}$$

と表される。任意の t に対して $h(t) \geq 0$ であるから、判別式が 0 以下である。よって、 $S_{xy}^2 \leq S_{xx} S_{yy}$, すなわち $-1 \leq R \leq 1$ となる。

(3) $R = 1$ となる必要十分条件は, $i = 1, \dots, n$ に対して, $y_i = t_0 x_i$ となる正の定数 t_0 がとれることである。

実際, $y_i = t_0 x_i$ となる正の定数 t_0 がとれるとき, $\sum_{i=1}^n x_i y_i = t_0 \sum_{i=1}^n x_i^2$, $\sum_{i=1}^n y_i^2 = t_0^2 \sum_{i=1}^n x_i^2$ より,
 $R = \sum_{i=1}^n x_i y_i / \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2} = 1$ となる。

逆に, $R = \sum_{i=1}^n x_i y_i / \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2} = 1$ とすると, $S_{xy}^2 = S_{xx} S_{yy}$ と書けるので,

$$h(t) = S_{yy} - 2t \sqrt{S_{xx} S_{yy}} + t^2 S_{xx} = (\sqrt{S_{yy}} - t \sqrt{S_{xx}})^2$$

となる。 $t_0 = \sqrt{S_{yy}} / \sqrt{S_{xx}}$ とおくと, $h(t_0) = 0$ となるので, $\sum_{i=1}^n (y_i - t_0 x_i)^2 = 0$ と書けることになる。すなわち, $i = 1, \dots, n$ に対して, $(y_i - t_0 x_i)^2 = 0$ となり, $y_i = t_0 x_i$ となる。

(4) $R = 0$ は $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 0$ を意味する。これは, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ の内積が 0 になること, すなわち, この 2 つのベクトルが直交することを意味する。

出題意図：

【問題 1】

- (1) 系列相関の検定に用いられる DW 統計量の定義を知っているかを問う。
- (2) DW 統計量の基本的な性質を問う。
- (3) 系列相関がある場合の対処法として、コ克蘭＝オーカット法の説明を問う。

【問題 2】

- (1) は相関係数の定義を知っているかを問う。
- (2) は相関係数の基本的な性質が導けるかを問う。
- (3) は論理的な思考能力を測る。
- (4) はベクトルの内積が直交することを意味するという基本的な結果を知っているかを問う。

